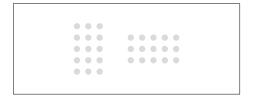
Rechengesetze

Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz):

Im Bild rechts siehst Du, dass es egal ist, wie ich die Bälle zähle, als 5 · 3 oder als 3 · 5. Es bleiben gleich viel Bälle. Die Menge hat einfach nur ihre Lage "getauscht" (lat.: commutare "vertauschen")



 $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ lässt sich verallgemeinern: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

Oder anders gesagt: Bei einem Produkt kann ich die Reihenfolge der Faktoren **austauschen**, ohne das Ergebnis zu beeinflussen.

Aufgabe 1

Mimm Dir einen Zettel und ordne immer wieder 12 Punkte im Gitter an (ähnlich dem ersten Bild oben rechts).

- 1. Wie viele verschiedene Anordnungen findest Du? Formuliere zu jeder Anordnung einen Term (z.B. $3 \cdot 4$, $6 \cdot 2$)
- 2. Vergiss nicht die beiden Fälle, in denen alle Punkte in einer Linie liegen. Wie heißen die zugehörigen Termen?

Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz):

In dem Bild rechts siehst Du, dass es Vorgänge gibt, bei denen es egal ist, in welcher Reihenfolge sich Teilmengen *verbinden*, das Ergebnis ist das gleiche.

Solche Vorgänge nennt man assoziativ (lat.: associare "verbinden")

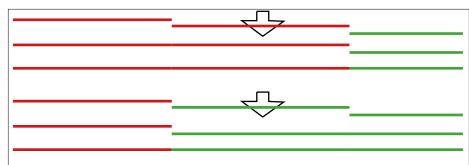
Das Symbol \circ (ganz unten in der Zeichnung) steht stellvertretend für einen assoziativen Vorgang. Setzen wir dafür das bekannte + ein, so erhalten wir:

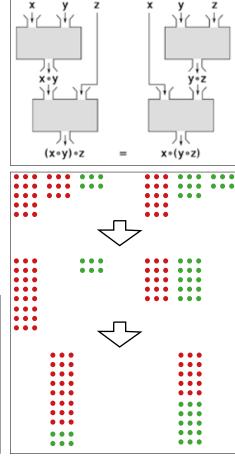
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Oder anders gesagt: Das Addieren ist assoziativ, denn es ist egal, in welcher Reihenfolge man die Summanden schrittweise addiert (= verbindet).

Beispiel: (15 + 9) + 6 = 15 + (9 + 6) (siehe Punktebeispiel rechts)

Das gilt auch beim *Verbinden von Längen*, wie das Bild unten zeigt. Es besteht aus zwei Zeichnungen mit jeweils einem Pfeil, der andeutet, wie Teile von oben nach unten verbunden werden. Einmal werden erst die roten Linien, dann erst die grünen Linien verbunden. Das Ergebnis ist die gleiche Länge.





Aufgabe 2

Bei Koblenz fließen die Mosel (585 km) und die Lahn (250 km) in den Rhein (1.233 km).

1. Wie lang ist die Summe der drei Flüsse? Ist die Reihenfolge bei der Summenbildung wichtig? Begründe!

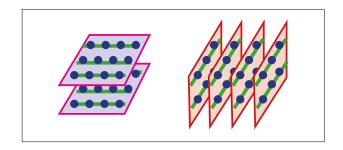
Auch das *Multiplizieren* ist ein assoziativer Vorgang.

Auf dem Bild rechts sind zweimal die gleiche Menge blauer Punkte verteilt. Stell Dir Klebunkte an Kuchenblechen vor. Im ersten Beispiel haben wir zwei waagerechte Bleche und darauf drei Reihen mit vier Punkten. Im zweiten Beispiel kleben zwei mal drei Punkte auf vier hängenden Flächen.

Wie man es auch nimmt: Es sind 24 Klebepunkte:

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$$

Die Kuchenbleche sind dann also die Klammern ;-)



Aufgabe 3

Schau Dir noch einmal sehr genau alle Bilder auf dieser Seite an.

1. Was wurde durch die Farben jeweils symbolisiert? Welche Farbe stand im Einzelfall wofür? Beachte auch die Texte.

Aufgabe 4

Kommutativ- und Assoziativgesetz erlauben es Dir, beim Berechnen von Produkten die Reihenfolge der Faktoren beliebig "auszutauschen" und in beliebiger Reihenfolge zu berechnen/"verbinden". Wie Du das tust, hängt davon ab, welche Faktoren sich einfacher multiplizieren lassen.

Beispiel:
$$4 \cdot 13 \cdot 25 = 13 \cdot 4 \cdot 25 = 13 \cdot (4 \cdot 25) = 13 \cdot 100 = 1300$$

- 1. Untersuche das Beispiel. In welcher Reihenfolge wurden die Gesetze angewandt?
- 2. Ordne auch folgende Termen geschickt um um setze Klammern:

$$4 \cdot 9 \cdot 125 =$$
 $8 \cdot 29 \cdot 125 =$ $8 \cdot 15 \cdot 25 =$

$$8 \cdot 15 \cdot 25 =$$

3. Fasse geschickt zusammen und berechne:

$$25 \cdot 33 \cdot 4 =$$
 $15 \cdot 111 \cdot 20 =$ $12 \cdot 4 \cdot 125 =$ $80 \cdot 5 \cdot 21 =$

$$15 \cdot 111 \cdot 20 =$$

$$12 \cdot 4 \cdot 125 =$$
_

$$80 \cdot 5 \cdot 21 =$$

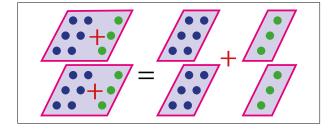
Verteilungsgesetz (Distributivgesetz):

Nun verteilen wir die Punkte unterschiedlich (lat.: distibuere "verteilen").

Auf dem Bild rechts siehst Du eine Entwicklung von links nach rechts: Erst liegen links auf zwei Flächen jeweils sechs und drei grüne Punkte.

Dann sind sie so *neu verteilt* worden, dass auf zwei Stapeln je zwei mal sechs und zwei mal drei Punkte liegen.

$$2 \cdot (6+3) = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3$$
 oder allgemein: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$



Aufgabe 5

Die Rechengesetze gelten offensichtlich für Multiplikation und Addition. Gelten sie auch für Subtraktion und Division? Teste. Vertausch im Folgenden Summanden, Faktoren, Divisor oder Dividenden:

$$2 - 10 =$$
 $3 \cdot (15 - 6) =$

Aufgabe 6

Ordne jeweils eine Aufgabe mit Klammer auf der linken Seite einer Aufgabe ohne Klammer auf der rechten Seite zu.

$$3 \cdot (17 + 8)$$

 $3 \cdot (33 - 14)$
 $(27 - 15) : 3$
 $(36 - 6) : 3$

$$27:3-15:3$$

 $3\cdot 17+3\cdot 8$

$$3 \cdot 33 - 3 \cdot 14$$

Aufgabe 7

Wende das Distributivgesetz an und berechne die Lösungen. Sie stehen in der unteren Zeile. In der richtigen Reihenfolge – entsprechend den Lösungen – ergeben die Buchstaben den Namen einer europäischen Hauptstadt.

Beispiel: $4 \cdot 17 + 4 \cdot 3 = 4 \cdot (17 + 3) = 4 \cdot 20 = 80$

- a) $2 \cdot 12 + 2 \cdot 18 =$
- c) $430 \cdot 7 + 270 \cdot 7 =$
- e) $7 \cdot 84 7 \cdot 44 =$
- g) 32 · 8 19 · 8 = _____
- i) $8 \cdot 25 5 \cdot 8 =$
- b) $8 \cdot 18 + 8 \cdot 82 =$
- d) $63 \cdot 12 + 37 \cdot 12 =$
- f) $9 \cdot 71 9 \cdot 21 =$
- h) $4 \cdot 78 68 \cdot 4 =$
- j) $54 \cdot 6 6 \cdot 39 =$
- 40 (G) 60 (K) 90 (N) 104(A) 160(E) 280 (N) 450 (H) 800 (O) 1200 (E) 4900 (P)

Aufgabe 8

Wende das Distributivgesetz an und berechne die Lösungen.

- a) 372:3 72:3 = _____
- c) 2082:6-282:6=____
- e) 4984 : 7 784 : 7 = _____
- b) 468 : 4 + 332 : 4 = _____
- d) 3504 : 8 + 496 : 8 = ____
- f) 6642:9+1458:9=_____

Aufgabe 9

Multiplizere geschickt. Zerlege dazu einen Faktor in ein Produkt, um mit Vielfachen von Hundert rechnen zu können.

Beispiel: $28 \cdot 25 = 7 \cdot 4 \cdot 25 = 7 \cdot 100 = 700$ (**Idee**: Wie komme ich von einer der Zahlen auf Hundert? Für die 25 bräuchte ich eine 4. Die steckt in der 28 drin.)

- a) 120 · 25 = _____
- c) 264 · 50 = _____
- b) 48 · 125 = _____
- d) 326 · 500 =

Aufgabe 10

Eine Schulklasse möchte das Geld, das bei einem Klassenfest eingenommen wurde, für drei Hilfsprojekte spenden. Durch den Verkauf von Kaffee, Kuchen und Getränken wurden $51 \in$ eingenommen, der Grillstand konnte sogar $69 \in$ Gewinn machen. Ein Schüler meint, dass für jedes Hilfsprojekt $74 \in$ gespendet werden können. Er hat wie folgt gerechnet: 51 + 69 : 3 = 51 + 23 = 74.

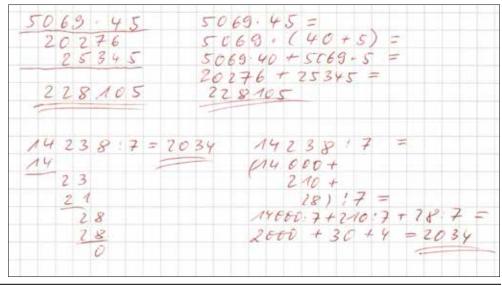
Beurteile, ob er Recht hat. Falls nicht, was wäre richtig? Wie kann man es mit Hilfe des Distributivgesetzes berechnen?

Aufgabe 11

Du siehst rechts unten vier handschriftliche Berechnungen. Links untereinander eine Multiplikation und eine Division, wie Du es gelernt hast.

Rechts daneben jeweils eine andere Version der beiden Berechnungen mit den gleichen Ergebnissen.

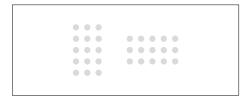
- 1. Welches der Rechengesetze wurde angewandt?
- 2. Führe selbst ähnliche Berechnungen durch für 867 · 77 und 27816 : 61



Rechengesetze

Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz):

Im Bild rechts siehst Du, dass es egal ist, wie ich die Bälle zähle, als $5 \cdot 3$ oder als $3 \cdot 5$. Es bleiben gleich viel Bälle. Die Menge hat einfach nur ihre Lage "getauscht" (lat.: commutare "vertauschen")



 $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ lässt sich verallgemeinern: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

Oder anders gesagt: Bei einem Produkt kann ich die Reihenfolge der Faktoren **austauschen**, ohne das Ergebnis zu beeinflussen.

Aufgabe 1

Mimm Dir einen Zettel und ordne immer wieder 12 Punkte im Gitter an (ähnlich dem ersten Bild oben rechts).

- 1. Wie viele verschiedene Anordnungen findest Du? Formuliere zu jeder Anordnung einen Term (z.B. $3 \cdot 4$, $6 \cdot 2$)
- 2. Vergiss nicht die beiden Fälle, in denen alle Punkte in einer Linie liegen. Wie heißen die zugehörigen Termen?

1 · 12 und 12 · 1

Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz):

In dem Bild rechts siehst Du, dass es Vorgänge gibt, bei denen es egal ist, in welcher Reihenfolge sich Teilmengen *verbinden*, das Ergebnis ist das gleiche. Solche Vorgänge nennt man *assoziativ* (lat.: *associare* "verbinden")

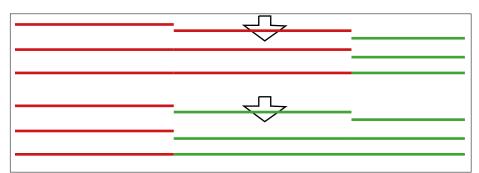
Das Symbol \circ (ganz unten in der Zeichnung) steht stellvertretend für einen assoziativen Vorgang. Setzen wir dafür das bekannte + ein, so erhalten wir:

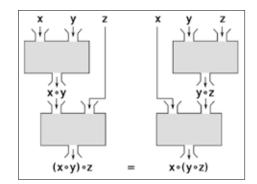
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

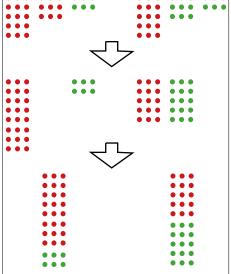
Oder anders gesagt: Das Addieren ist assoziativ, denn es ist egal, in welcher Reihenfolge man die Summanden schrittweise addiert (= verbindet).

Beispiel: (15 + 9) + 6 = 15 + (9 + 6) (siehe Punktebeispiel rechts)

Das gilt auch beim *Verbinden von Längen*, wie das Bild unten zeigt. Es besteht aus zwei Zeichnungen mit jeweils einem Pfeil, der andeutet, wie Teile von oben nach unten verbunden werden. Einmal werden erst die roten Linien, dann erst die grünen Linien verbunden. Das Ergebnis ist die gleiche Länge.







Aufgabe 2

Bei Koblenz fließen die Mosel (585 km) und die Lahn (250 km) in den Rhein (1.233 km).

1. Wie lang ist die Summe der drei Flüsse? Ist die Reihenfolge bei der Summenbildung wichtig? Begründe!

Reihenfolge egal, da assoziativer Rechenvorgang.

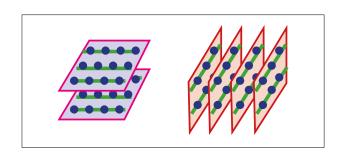
Auch das Multiplizieren ist ein assoziativer Vorgang.

Auf dem Bild rechts sind zweimal die gleiche Menge blauer Punkte verteilt. Stell Dir Klebunkte an Kuchenblechen vor. Im ersten Beispiel haben wir zwei waagerechte Bleche und darauf drei Reihen mit vier Punkten. Im zweiten Beispiel kleben zwei mal drei Punkte auf vier hängenden Flächen.

Wie man es auch nimmt: Es sind 24 Klebepunkte:

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$$

Die Kuchenbleche sind dann also die Klammern ;-)



Aufgabe 3

Schau Dir noch einmal sehr genau alle Bilder auf dieser Seite an.

1. Was wurde durch die Farben jeweils symbolisiert? Welche Farbe stand im Einzelfall wofür? Beachte auch die Texte.

Rot und grün standen für die einzelnen Summanden. Grüne Linien und rote Ränder standen für Vielfache.

Aufgabe 4

Kommutativ- und Assoziativgesetz erlauben es Dir, beim Berechnen von Produkten die Reihenfolge der Faktoren beliebig "auszutauschen" und in beliebiger Reihenfolge zu berechnen/"verbinden". Wie Du das tust, hängt davon ab, welche Faktoren sich einfacher multiplizieren lassen.

Beispiel:
$$4 \cdot 13 \cdot 25 = 13 \cdot 4 \cdot 25 = 13 \cdot (4 \cdot 25) = 13 \cdot 100 = 1300$$

- 1. Untersuche das Beispiel. In welcher Reihenfolge wurden die Gesetze angewandt? Erst Kommutativ-, dann Assoziativgesetz
- 2. Ordne auch folgende Termen geschickt um um setze Klammern:

$$4 \cdot 9 \cdot 125 = 9 \cdot (4 \cdot 25)$$
 $5 \cdot 3 \cdot 80 = 3 \cdot (5 \cdot 80)$ $8 \cdot 29 \cdot 125 = 29 \cdot (8 \cdot 125)$ $8 \cdot 15 \cdot 25 = 15 \cdot (8 \cdot 25)$

3. Fasse geschickt zusammen und berechne:

$$25 \cdot 33 \cdot 4 = 33 \cdot 100 = 3300 \quad 15 \cdot 111 \cdot 20 = 111 \cdot 300 = 33300 \quad 12 \cdot 4 \cdot 125 = 12 \cdot 500 = 6000 \quad 80 \cdot 5 \cdot 21 = 400 \cdot 21 = 840$$

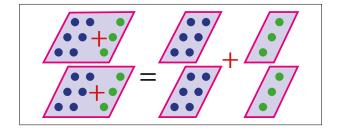
Verteilungsgesetz (Distributivgesetz):

Nun *verteilen* wir die Punkte unterschiedlich (lat.: *distibuere* "verteilen").

Auf dem Bild rechts siehst Du eine Entwicklung von links nach rechts: Erst liegen links auf zwei Flächen jeweils sechs und drei grüne Punkte.

Dann sind sie so *neu verteilt* worden, dass auf zwei Stapeln je zwei mal sechs und zwei mal drei Punkte liegen.

$$2 \cdot (6+3) = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3$$
 oder allgemein: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$



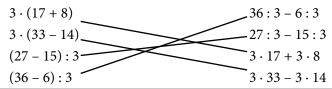
Aufgabe 5

Die Rechengesetze gelten offensichtlich für Multiplikation und Addition. Gelten sie auch für Subtraktion und Division? Teste. Vertausch im Folgenden Summanden, Faktoren, Divisor oder Dividenden:

$$12 - 10 = 8$$
, aber $10 - 12 = -2$ $20: 4 = 5$, aber $4:20 = 1/5$ $3 \cdot (15 - 6) = 27$ und $3 \cdot 15 - 3 \cdot 6 = 27$ $3 \cdot (20: 4) = 3 \cdot 5 = 15$, aber $3 \cdot 20: 3 \cdot 4 = 60: 12 = 5$

Aufgabe 6

Ordne jeweils eine Aufgabe mit Klammer auf der linken Seite einer Aufgabe ohne Klammer auf der rechten Seite zu.



Aufgabe 7

Wende das Distributivgesetz an und berechne die Lösungen. Sie stehen in der unteren Zeile. In der richtigen Reihenfolge - entsprechend den Lösungen - ergeben die Buchstaben den Namen einer europäischen Hauptstadt.

Beispiel: $4 \cdot 17 + 4 \cdot 3 = 4 \cdot (17 + 3) = 4 \cdot 20 = 80$

a)
$$2 \cdot 12 + 2 \cdot 18 = 2 \cdot (12 + 18) = 2 \cdot 30 = 60$$

c)
$$430 \cdot 7 + 270 \cdot 7 = 7 \cdot (430 + 270) = 7 \cdot 700 = 4900$$

e)
$$7 \cdot 84 - 7 \cdot 44 = 7 \cdot (84 - 44) = 7 \cdot 40 = 280$$

g)
$$32 \cdot 8 - 19 \cdot 8$$

$$= (33 - 19) \cdot 8 = 13 \cdot 8 = 104$$

i)
$$8 \cdot 25 - 5 \cdot 8 = (25 - 5) \cdot 8 = 20 \cdot 8 = 160$$

$$-(33-19) \cdot 8 - 13 \cdot 8 - 104$$

h)
$$4 \cdot 78 - 68 \cdot 4 = 4 \cdot (78 - 68) = 4 \cdot 10 = 40$$

f) $9 \cdot 71 - 9 \cdot 21 = 9 \cdot (71 - 21) = 9 \cdot 50 = 450$

b) $8 \cdot 18 + 8 \cdot 82 = 8 \cdot (18 + 82) = 18 \cdot 100 = 1800$

d) $63 \cdot 12 + 37 \cdot 12 = (63 + 37) \cdot 12 = 100 \cdot 12 = 1200$

j)
$$54 \cdot 6 - 6 \cdot 39 = 6 \cdot (54 - 39) = 6 \cdot 15 = 90$$

Kopenhagen

Aufgabe 8

Wende das Distributivgesetz an und berechne die Lösungen.

a)
$$372:3-72:3=(372-72):3=300:3=100$$

a)
$$372:3-72:3=(372-72):3=300:3=100$$

c)
$$2082:6-282:6=(2082-282):6=1800:6=300$$

e)
$$4984:7-784:7=(4984-784):7=4200:7=600$$

b)
$$468: 4 + 332: 4 = (468 - 332): 4 = 136: 4 = 34$$

d)
$$3504:8+496:8=(3504+496):8=4000:8=500$$

f)
$$6642:9+1458:9=(6642+1458):9=8100:9=900$$

Aufgabe 9

Multiplizere geschickt. Zerlege dazu einen Faktor in ein Produkt, um mit Vielfachen von Hundert rechnen zu können.

Beispiel: $28 \cdot 25 = 7 \cdot 4 \cdot 25 = 7 \cdot 100 = 700$ (**Idee**: Wie komme ich von einer der Zahlen auf Hundert? Für die 25 bräuchte ich eine 4. Die steckt in der 28 drin.)

a)
$$120 \cdot 25 = 30 \cdot 4 \cdot 25 = 30100$$

b)
$$48 \cdot 125 = 12 \cdot 4 \cdot 125 = 12 \cdot 1000 \ 12000$$

c)
$$264 \cdot 50 = 132 \cdot 2 \cdot 50 = 132 \cdot 100 = 13200$$

d)
$$326 \cdot 500 = 163 \cdot 2 \cdot 500 = 163 \cdot 1000 = 163000$$

Aufgabe 10

Eine Schulklasse möchte das Geld, das bei einem Klassenfest eingenommen wurde, für drei Hilfsprojekte spenden. Durch den Verkauf von Kaffee, Kuchen und Getränken wurden 51 € eingenommen, der Grillstand konnte sogar 69€ Gewinn machen. Ein Schüler meint, dass für jedes Hilfsprojekt 74€ gespendet werden können. Er hat wie folgt gerechnet: 51 + 69 : 3 = 51 + 23 = 74.

Beurteile, ob er Recht hat. Falls nicht, was wäre richtig? Wie kann man es mit Hilfe des Distributivgesetzes berechnen? Er hat nicht Recht. Man muss neben den Grilleinnahmen auch jene vom Verkaufsstand dritteln. Also: 51:3+69:3=(51 + 69): 3 = 120: 3 = 40. Es können also für jedes Hilfsprojekt nicht 74 sondern leider nur 40 € gespendet werden.

Aufgabe 11

Du siehst rechts unten vier handschriftliche Berechnungen. Links untereinander eine Multiplikation und eine Division, wie Du es gelernt hast.

Rechts daneben jeweils eine andere Version der beiden Berechnungen mit den gleichen Ergebnissen.

1. Welches der Rechengesetze wurde dabei angewandt?

Distributivgesetz

2. Führe selbst ähnliche Berechnungen durch für 867 · 77 und 27816 : 61

